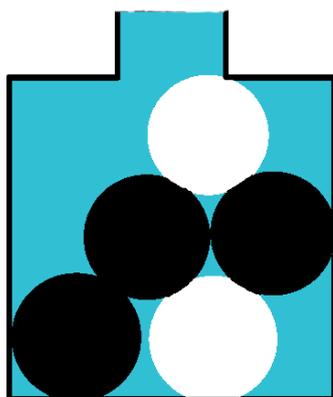




Chapitre : Variables aléatoires

x_i	x_1	x_2	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_n

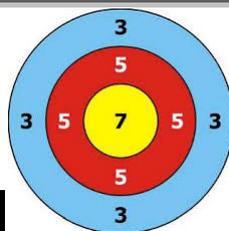


On tire au hasard , une à une toutes les boules sans les remettre
 R variable aléatoire correspondant au rang de la première boule blanche tirée .

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad ??$$



3 noires et 2 blanches indiscernables au toucher .



$$p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad , \quad k \in \{0, 1, \dots, n\}$$

$$E(x) = n p \quad \& \quad v(x) = n p (1-p)$$

Professeur : Aloui Fahem

- 4^{ème} Sc.Exp 1 -

BAC 2K21

Bonne chance

VARIABLES ALÉATOIRES SUR UN ENSEMBLE PROBABILISÉ FINI

1°. Aléa numérique et loi de probabilité

Activité

Une urne contient deux boules numérotées 4 et trois boules numérotées -2, indiscernables au toucher. On tire simultanément deux boules de l'urne et on considère les événements suivants :

A « Tirer deux boules numérotées 4 »

B « Tirer deux boules portant des numéros différents »

C « Tirer deux boules portant le même numéro »

D « Tirer deux boules numérotées -2 »

1°. / La probabilité de chacun des événements ci-dessus est :

$$p(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}E} = \frac{C_2^2}{C_5^2} = 0.1$$

$$p(B) = \frac{\text{Card}B}{\text{Card}E} = \frac{C_2^1 \times C_3^1}{C_5^2} = 0.6$$

$$p(C) = \frac{\text{Card}C}{\text{Card}E} = \frac{C_2^2 + C_3^2}{C_5^2} = 0.4$$

$$p(D) = \frac{\text{Card}D}{\text{Card}E} = \frac{C_3^2}{C_5^2} = 0.3$$

2°. / Soit l'application $X : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour toute partie de deux boules tirées $\{b_i, b_j\}$ associe

le réel somme des deux numéros : $i+j$ donc les valeurs prises par X sont : -4, 2 et 8.

On note $X(E) = \{-4, 2, 8\}$: Ensemble des valeurs prise par X .

Déterminons $p(X = x_i)$ pour tout x_i appartenant à $X(E)$

$$p(X = -4) = p(D) = 0.3 \quad ; \quad p(X = 2) = p(B) = 0.6 \quad ; \quad p(X = 8) = p(A) = 0.1$$

On présente les résultats ci-dessus dans un tableau appelé tableau de loi de probabilité de X .

x_i	-4	2	8
$p(X = x_i)$	0.3	0.6	0.1

Définition et conséquence

Soit $(E, \mathcal{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini.

- On appelle aléa numérique ou variable aléatoire toute application
- On appelle loi de probabilité de X ou distribution de X , l'application

$$X : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p_x : X(E) \rightarrow [0,1]$$

$$x_i \mapsto p(X = x_i)$$

- Si $X(E) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ alors $\sum_{i=1}^n p(X = x_i) = 1$

Application 1

Un sac contient six jetons blanc et quatre jetons rouges indiscernables au toucher.

On tire simultanément trois jetons et on considère X la variable aléatoire qui à chaque tirage fait correspondre le nombre de jetons blanc restant dans le sac.

Déterminer la loi de probabilité de X .

Activité 2 page 83

2°. Espérance, variance et écart - type d'une variable aléatoire

Définition 1

Soit $(E, \mathcal{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur E telle que $X(E) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, on appelle espérance mathématique ou moyenne de X le nombre $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$.

Propriété

X et Y deux variables aléatoires sur E et $\alpha \in \mathbb{R}$
 $E(\alpha X) = \alpha E(X)$ et $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Application 2

On tire au hasard un échantillon de trois articles d'une boîte contenant 12 articles dont trois sont défectueux, calculer l'espérance mathématique du nombre d'articles défectueux auquel on peut s'attendre.

L'univers est l'ensemble des combinaisons de trois articles de la boîte donc $\text{card}E = C_{12}^3 = 220$.

Soit X l'aléa numérique qui à chaque échantillon associe le nombre d'articles défectueux qu'il contient

$$\text{alors on a : } X(E) = \{0, 1, 2, 3\}, \quad p(X=0) = \frac{C_9^3}{C_{12}^3} = \frac{84}{220}, \quad p(X=1) = \frac{C_3^1 C_9^2}{C_{12}^3} = \frac{108}{220},$$

$$p(X=2) = \frac{C_3^2 C_9^1}{C_{12}^3} = \frac{27}{220} \quad \text{et} \quad p(X=3) = \frac{C_3^3}{C_{12}^3} = \frac{1}{220}$$

d'où

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{84}{220}$	$\frac{108}{220}$	$\frac{27}{220}$	$\frac{1}{220}$

$$\text{et } E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i p_i = 0 \times \frac{84}{220} + 1 \times \frac{108}{220} + 2 \times \frac{27}{220} + 3 \times \frac{1}{220} = 0.75$$

On en déduit que, sur un échantillon de 3 articles, le nombre d'articles défectueux est 0.75 soit 1 sur 4

Espérance et jeux

Pour une épreuve d'un jeu de hasard, on dit que :

Le jeu est avantageux (gagnant) ou l'épreuve est favorable si $E(X) > 0$

Le jeu est désavantageux (perdant) ou l'épreuve est défavorable si $E(X) < 0$

Le jeu est équitable si $E(X) = 0$

Exemple

Un joueur lance un dé équilibré et s'intéresse au nombre indiqué sur la face supérieure.

Il gagne en dinars la somme égale à ce nombre s'il est premier.

Il perd en dinars la somme égale à ce nombre s'il n'est pas premier.

Q: Déterminer la loi de probabilité du gain algébrique puis calculer $E(X)$ et interpréter.

R: On a $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ alors $X(E) = \{-6, -4, -1, 2, 3, 5\}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^6 x_i p_i = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{6} x_i = \frac{1}{6} (-6 - 4 - 1 + 2 + 3 + 5) = \frac{-1}{6}$$

L'espérance du jeu est $E(X) = \frac{-1}{6} < 0$ donc l'épreuve est défavorable.

Définition 2

Soit $(E, \mathcal{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur E

On appelle variance de X le nombre $V(X) = E((X - E(X))^2)$ ou encore $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

et écart - type de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Application 3

On jette trois fois de suite une pièce de monnaie mal équilibrée et telle que :

La probabilité d'obtenir face est trois fois celle d'obtenir pile .

On note X l'aléa représentant le nombre de faces obtenues lors d'un lancer de trois fois de la pièce .

Calculer la variance et l'écart type de X .

On a $\text{card}E = 2^3 = 8$; $E = \{ FFF, FFP, FPF, FPP, PFF, PFP, PPF, PPP \}$ donc $X(E) = \{ 0, 1, 2, 3 \}$

d'ou $p(X=0) = (\frac{1}{4})^3$, $p(X=1) = 3 \times \frac{3}{4} \times (\frac{1}{4})^2$, $p(X=2) = 3 \times (\frac{3}{4})^2 \times \frac{1}{4}$ et $p(X=3) = (\frac{3}{4})^3$

x_i	0	1	2	3	total
p_i	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	1
$x_i p_i$	0	$\frac{9}{64}$	$\frac{54}{64}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{144}{64}$
$x_i^2 p_i$	0	$\frac{9}{64}$	$\frac{108}{64}$	$\frac{243}{64}$	$\frac{360}{64}$

$$\text{ainsi } E(X) = \sum_i x_i p_i = \frac{144}{64} \quad \text{et} \quad E(X^2) = \sum_i x_i^2 p_i = \frac{360}{64}$$

$$\text{et par suite } V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2304}{4096} = 0.5625 \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 0.75$$

3°. Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition

Soit $(E, \mathcal{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur E

On appelle fonction de répartition de X , l'application définie par : $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

$$x \mapsto p(X \leq x)$$

Exemple Prenons le tableau de loi de probabilité de l'Application 1

x_i	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

d'après la définition , on a alors :

$$\text{si } x \in]-\infty, 3[, F(x) = p(X \leq x) = 0$$

$$\text{si } x \in [3, 4[, F(x) = p(X \leq x) = p(x=3) = \frac{1}{6}$$

$$\text{si } x \in [4, 5[, F(x) = p(X \leq x) = p(x=3) + p(x=4) = \frac{2}{3}$$

$$\text{si } x \in [5, 6[, F(x) = p(X \leq x) = p(x=3) + p(x=4) + p(x=5) = \frac{29}{30}$$

$$\text{si } x \in [6, +\infty[, F(x) = p(X \leq x) = p(x=3) + p(x=4) + p(x=5) + p(x=6) = 1$$

ainsi la fonction de répartition F de X est définie comme indiqué ci-contre :

Représentation graphique de la fonction de répartition d'une variable aléatoire

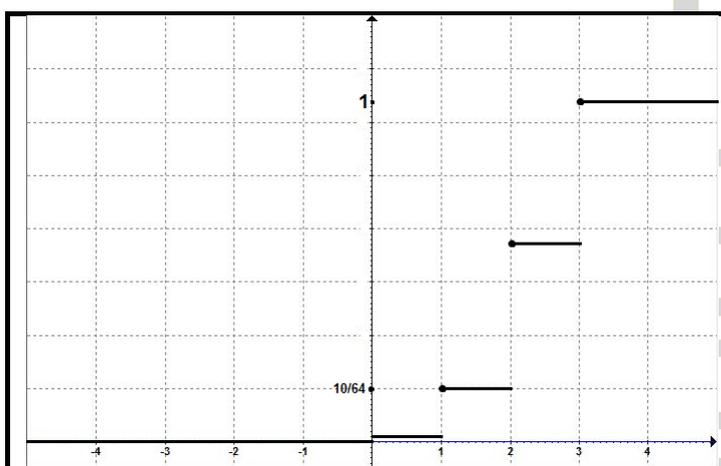
Comme exemple , prenons le tableau de la loi de probabilité de l'Application 3

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

La fonction de répartition F de la variable aléatoire X et sa représentation sont comme suit :

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \frac{1}{64} & \text{si } x \in [0, 1[\\ \frac{10}{64} & \text{si } x \in [1, 2[\\ \frac{37}{64} & \text{si } x \in [2, 3[\\ 1 & \text{si } x \in [3, +\infty[\end{cases}$$



Activité 1 page 86

4°. Loi binomiale

Définition Soit E une expérience aléatoire constituée de n épreuves identiques , indépendantes et n'ayant que deux issues : succès ou échec et soit p la probabilité de l'évènement succès .

La loi de probabilité de La variable aléatoire X associant le nombre de succès réalisés au cours des n épreuves est donnée par : $p(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$

On dit que X suit une loi binomiale de paramètre (n , p) et on a $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$

Activité 1 page 87

1°./ On note par S l'évènement : « le joueur atteint la cible »

Le nombre de tirs ou épreuves identiques est $n = 2$, $p = p(S) = 0.9$ et $X(E) = \{0, 1, 2\}$

a/ X suit une loi binomiale de paramètre $n = 2$ et $p = 0.9$

d'où $p(X=k) = C_2^k p^k (1-p)^{2-k}$, $k \in \{0, 1, 2\}$, ainsi on a :

$$p(X=0) = C_2^0 (0.9)^0 (1-0.9)^2 = 0.01$$

$$p(X=1) = C_2^1 (0.9)^1 (1-0.9)^1 = 0.18$$

$$p(X=2) = C_2^2 p^2 (1-p)^0 = 0.81$$

Le tableau de loi de probabilité est alors comme suit :

x_i	0	1	2
p_i	0.01	0.18	0.81

b/ Soit B l'évènement : « le joueur atteint au moins une fois sa cible »

$$p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - p(X=0) = 0.99$$

2°./ Y suit une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = 0.9$

d'où $p(Y=k) = C_{10}^k p^k (1-p)^{10-k}$; $k \in \{0, 1, \dots, 10\}$.

On note les évènements :

A : « le joueur réalise neuf succès »

B : « le joueur réalise au moins un succès »

alors on a : $p(A) = p(Y=9) = C_{10}^9 (0.9)^9 (1-0.9)^1 \approx 0.39$

$$\text{et } p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - p(Y=0) = 1 - C_{10}^0 (0.9)^0 (1-0.9)^{10} = 0.99$$

Exercice N°3 Bac 2014 contrôle